5. Martio O., Rickman S., Vaisala J. *Definitions for quasiregular mappings* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. – No. 448. – 1969. – 40 p.

6. Сычев А. В. *Пространственные квазиконформные отображения.* – Новосибирск: Наука, 1975.

7. Стругов Ю. Ф. *Вариации пространственных квазиконформных отображений и экстремальные отображения* // В сб. Динамика сплошной среды, вып. 25. – 1976. – С. 154–157.

8. Елизарова М. А., Малютина А. Н. *Отображения с s-усредненной характеристикой. Определение и свойства.* – LAMBERT Academic Publishing. – 2013. – 121 с.

9. Малютина А. Н., Алипова К. А. *Вариации пространственных негомеоморфных отображений с s-усредненной характеристикой* // Матер. 19-й межд. Сарат. зимней школы. – Саратов: Научная книга, 2016. – С. 178–181.

10. Alipova K., Elizarova M., Malyutina A. *Examples of the mappings with s-averaged characteristic* // Компл. анализ и его прил.: Матер. VII Петрозаводской межд. конф. (29 июня – 5 июля 2014 г.) / под ред. проф. В. В. Старкова; ПетрГУ. Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2014. – С. 12–17.

ANALOG TO THE EULER EQUATION FOR EXTREMAL MAPPINGS WITH $K_{I,S}$- OR $K_{O,S}$-AVERAGED CHARACTERISTICS

A.N. Malyutina, K.A. Alipova

In this paper we consider extremal properties of mappings with s-averaged characteristic. Variational method is developed and successfully applied for solutions of extremal problems in the theory of plane quasiconformal mappings. We suggest to apply this classical method to solve extremal problems in the class of mappings with s-averaged characteristic.

Keywords: mapping with s-averaged characteristics, differential properties, variation, extremal mapping.

УДК 517.518

О РАВНОМЕРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ, ЗАДАННОГО ДВУМЯ СЕГМЕНТНЫМИ ФУНКЦИЯМИ, ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ВЕКТОР-ФУНКЦИЕЙ

А.В. Макаров[1], С.И. Дудов[2]

1 *alexander-makarov93@yandex.ru*; Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

2 *dudovsi@info.sgu.ru*; Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Рассматривается задача равномерного приближения многозначного отображения, заданного декартовым произведением двух сегментных функций, полиномиальной вектор-функцией. Сформулированные необходимые и достаточные условия решения являются обобщением результата С.И. Зуховицкого - М.Г. Крейна для приближения непрерывной вектор-функции.

Ключевые слова: равномерное приближение, многозначное отображение, полиномиальная вектор-функция, субдифференциал.

Пусть $\Phi(\cdot) : T \to 2^{R^2}$ – многозначное отображение, заданное на ограниченном замкнутом множестве $T \subset R$, со значениями, заданными в виде:

$$\Phi(t) = \left\{x \in R^2 : x \in f(t) \times g(t)\right\},$$

где $f(t) = \left[f_1(t), f_2(t)\right], g(t) = \left[g_1(t), g_2(t)\right]$ – сегментные функции, заданные непрерывными функциями $f_i(t), g_i(t), i = 1,2$, причём $f_1(t) \le f_2(t), g_1(t) \le g_2(t)$ для всех $t \in T$.

Рассматривается задача

$$\max_{t\in T}\max_{v\in\Phi(t)} \|v - \Pi_n(A,t)\| \longrightarrow \min_{A=(A_1,A_2)\in R^{2n+2}}. \qquad (1)$$

Здесь $\Pi_n(A,t) = (P_n(A_1,t), P_n(A_2,t)) \in R^2$, где $P_n(A_i,t) = a_{0i} + a_{1i}t + \cdots + a_{ni}t^n$ – алгебраический полином степени n, $A_i = (a_{0i}, a_{1i}, \ldots, a_{ni}) \in R^{n+1}$ – вектор его коэффициентов, $i = \overline{1,2}$, $\|\cdot\|$ – евклидова норма.

Теорема 1. *Задача (1) эквивалентна задаче*

$$\varphi(A) \equiv \max_{t\in T}\{F(A_1,t) + G(A_2,t)\} \longrightarrow \min_{A=(A_1,A_2)\in R^{2n+2}}, \qquad (2)$$

где

$$F(A_1,t) = \max\left\{(P_n(A_1,t) - f_1(t))^2, (P_n(A_1,t) - f_2(t))^2\right\},$$
$$G(A_2,t) = \max\left\{(P_n(A_2,t) - g_1(t))^2, (P_n(A_2,t) - g_2(t))^2\right\}.$$

Функции $F(A_1,t)$ и $G(A_2,t)$ являются выпуклыми и конечными на R^{n+1} по A_1 и A_2 соответственно. В соответствии с субдифференциальным исчислением ([1, гл.1]) формулы их субдифференциалов можно выразить в виде

$$\partial_{A_1}F(A_1,t) = \begin{cases} 2(P_n(A_1,t) - f_1(t))(1,t,,\ldots,t^n), \text{если } \left|P_n(A_1,t) - f_1(t)\right| > \left|P_n(A_1,t) - f_2(t)\right|, \\ 2(P_n(A_1,t) - f_2(t))(1,t,,\ldots,t^n), \text{если } \left|P_n(A_1,t) - f_1(t)\right| < \left|P_n(A_1,t) - f_2(t)\right|, \\ 2(P_n(A_1,t) - f_1(t))[-(1,t,,\ldots,t^n),(1,t,,\ldots,t^n)], \\ \qquad\qquad \text{если } \left|P_n(A_1,t) - f_1(t)\right| = \left|P_n(A_1,t) - f_2(t)\right|; \end{cases}$$

$$\partial_{A_2}G(A_2,t) = \begin{cases} 2(P_n(A_2,t) - g_1(t))(1,t,,\ldots,t^n), \text{если } \left|P_n(A_2,t) - g_1(t)\right| > \left|P_n(A_2,t) - g_2(t)\right|, \\ 2(P_n(A_2,t) - g_2(t))(1,t,,\ldots,t^n), \text{если } \left|P_n(A_2,t) - g_1(t)\right| < \left|P_n(A_2,t) - g_2(t)\right|, \\ 2(P_n(A_2,t) - g_1(t))[-(1,t,,\ldots,t^n),(1,t,,\ldots,t^n)], \\ \qquad\qquad \text{если } \left|P_n(A_2,t) - g_1(t)\right| = \left|P_n(A_2,t) - g_2(t)\right|; \end{cases}$$

Теорема 2. *Для того чтобы вектор $A^* = (A_1^*, A_2^*) \in R^{2n+2}$ являлся решением задачи (2), необходимо и достаточно, чтобы*

$$\max_{t\in Q(A^*)}\left\{\max_{v_1\in\partial_{A_1}F(A_1^*,t)} < v_1, A_1 > + \max_{v_2\in\partial_{A_2}G(A_2^*,t)} < v_2, A_2 >\right\} \ge 0, \quad \forall A_1, A_2 \in R^{n+1},$$

где $Q(A) = \left\{t \in T : \varphi(A) = F(A_1,t) + G(A_2,t)\right\}$, $< \cdot,\cdot >$ – скалярное произведение.

Отметим, что если $f_1(t) \equiv f_2(t), g_1(t) \equiv g_2(t)$ для $t \in T$, то из теоремы 2 следует известный критерий [2] для задачи равномерного приближения вектор-функции полиномиальной вектор-функцией в форме А.Н. Колмогорова (в двумерном случае).

Литература

1. Демьянов В. Ф., Васильев Л. В. *Недифференцируемая оптимизация*. – М.: Наука, 1981. – 384 с.

2. Зуховицкий С. И., Крейн М. Г. *Замечание об одном возможном обобщении теорем А. Хаара и А.Н. Колмогорова* // УМН. – 1950. – Т. 5. – Вып. 1 (35). – С. 217-229.

ON UNIFORM APPROXIMATION OF MULTI-VALUED MAP, GIVEN BY TWO SEGMENT FUNCTIONS, BY POLYNOMIAL VECTOR FUNCTION

A.V. Makarov, S.I. Dudov

The problem of uniform approximation of a multi-valued map, given by Cartesian product of two segment functions, by polynomial vector function is considered. The necessary and sufficient conditions for the solution of the problem are formulated. They are a generalization of the known result of S.I. Zukhovitsky and M.G. Krein.

Keywords: uniform approximation, multi-valued map, polynomial vector-function, subdifferential.

УДК 514.822

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА, РОДСТВЕННЫЕ ПРИНЦИПУ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Р.В. Макаров[1]

1 *ruva2007@ya.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

В статье рассматривается классическое неравенство Гейзенберга. Нами получены модификации этого неравенства.

Ключевые слова: принцип неопределенности Гейзенберга, интегральные неравенства.

В 1927 г. Вернер Гейзенберг открыл принцип неопределенности. Сейчас это – один из фундаментальных принципов в квантовой механике, устанавливающий предел точности одновременного определения пары характеризующих систему квантовых наблюдаемых, описываемых некоммутирующими операторами (например, координаты и импульса, тока и напряжения, электрического и магнитного поля). Более доступно он звучит так: чем точнее измеряется одна характеристика частицы, тем менее точно можно измерить вторую.

Принцип неопределенности может быть записан в виде:

$$\triangle x \cdot \triangle p \geqslant \hbar/2,$$

где $\triangle x$ – величина среднеквадратического отклонения координаты, $\triangle p$ – среднеквадратическое отклонение импульса, $\hbar$ – постоянная Планка.

В общем случае принцип неопределенности применим не только к координате и импульсу (как это показал Гейзенберг), но и к парам сопряженных переменных.

Неравенство Гейзенберга имеет фундаментальную важность во многих областях математического анализа и математической физики, и интенсивно изучалось с мо-